Тема 1 Основные понятия и определения

Сопротивление материалов – это наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов конструкций, сооружений и машин.

Методами сопротивления материалов ведутся практические расчеты и определяются необходимые (надежные) размеры деталей элементов инженерных конструкций.

Основные положения сопротивления материалов опираются на законы и теоремы механики и в первую очередь на законы статики, без знания которых изучение данного предмета становится практически невозможным.

В отличие от теоретической механики, сопротивление материалов рассматривает задачи, где наиболее существенными являются свойства деформируемых тел, а законы движения тела, как жесткого целого, не только отступают на второй план, но в ряде случаев являются попросту не существенными.

Начало науки о сопротивлении материалов обычно связывают с именем знаменитого физика, математика и астронома Галилео Галилея. В 1660 году Р. Гук сформулировал закон, устанавливающий связь между нагрузкой и деформацией. В XVIII веке необходимо отметить работы Л. Эйлера по устойчивости конструкций. XIX и XX века являются временем наиболее интенсивного развития науки в связи с общим бурным ростом строительства и промышленного производства при безусловно огромном вкладе ученых – механиков России.

Сопротивление материалов – одна из сложных дисциплин, занятия по этому курсу должны обязательно сопровождаться составлением конспекта и решением задач.

Совершенно необходимо научиться решать задачи самостоятельно. Следует также научиться делать выводы формул. При этом необходимо обращать особое внимание на физическую сущность явления и на те допущения и ограничения, которые делаются в процессе выводов.

Задачи курса.

Первую задачу курса сопротивления материалов составляет изложение методов расчета элементов конструкций на прочность. Под *прочностью* мы будем понимать способность нагруженной конструкций сопротивляться разрушению.

Вторую задачу курса сопротивления материалов составляет изложение методов расчета элементов конструкций на *жесткость*, т. е. способность элемента конструкции сопротивляться деформациям.

И, наконец, изложение методов расчета элемента конструкции на устойчивость составляет третью задачу курса. Понятие *устойчивости* может быть сформулировано следующим образом: равновесие элемента устойчиво, если малому изменению нагрузки соответствует малое изменение деформаций, и равновесие неустойчивое, если ограниченный рост нагрузки сопровождается неограниченным ростом деформаций.

При выполнении указанных видов расчета необходимо стремиться к максимальной экономии материала, т. е. к достаточным, но не завышенным размерам деталей машин и механизмов.

Таким образом, сопротивление материалов имеет целью создать практически приемлемые, простые приемы расчета типичных, наиболее часто встречающихся элементов конструкций.

Понятие о расчетной схеме.

Необходимость довести решение каждой практической задачи до некоторого числового результата заставляет в сопротивлении материалов прибегать к упрощающим гипотезам – т. е. предположениям, которые оправдываются в дальнейшем путем сопоставления расчетных данных с экспериментом.

Таким образом, приступая к расчету конструкции, следует прежде всего установить, что в данном случае является существенным и что не существенно.

Необходимо, как говорят, произвести схематизацию объекта конструкции (рис. 1.1), т. е. отбросить все те факторы, которые не могут сколько-нибудь заметным образом повлиять на работу системы в целом.

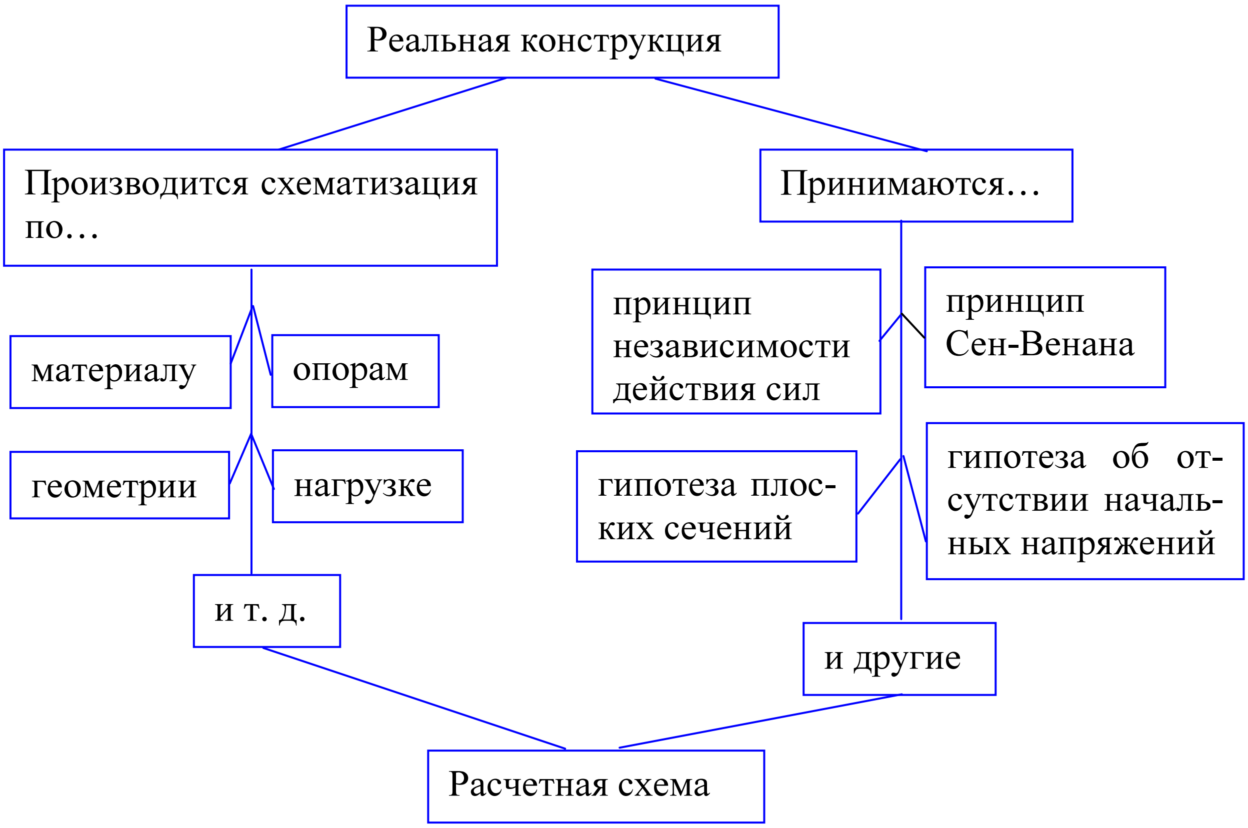

Рис. 1.1

Такого рода упрощения задачи совершенно необходимы, так как решение с полным учетом всех свойств реального объекта является принципиально невозможным в силу их очевидной неисчерпаемости.

Реальный объект, освобожденный от несущественных признаков, носит название расчетной схемы.

Схематически процесс получения расчетной схемы показан на рис. 1.1. Остановимся подробнее на отдельных этапах процесса превращения реальной конструкции в расчетную схему.

Схематизация по материалу.

Будем считать, что *материал* рассчитываемой конструкции *однороден*, т.е. его свойства не зависят от величины выделенного из тела объема.

Вводится *понятие сплошности среды*, как среды, непрерывно заполняющей отведенный ей объем. Вследствие чего к сплошной среде может быть применен анализ бесконечно малых.

Эти положения позволяют не принимать во внимание дискретную, атомистическую структуру вещества. Они применяются даже при расчете конструкций из такого неоднородного материала, как бетон.

Материал *изотропен*, т.е. обладает во всех направлениях одинаковыми свойствами. Это предпосылка используется при решении большинства задач сопротивления материалов, хотя для некоторых материалов (дерево, железобетон, медь, пластмассы и др.) она весьма условна.

Материалы, свойства которых в разных направлениях различны, называются *анизотропными*.

Материал конструкции обладает свойством идеальной *упругости*, т.е. способностью полностью восстанавливать первоначальные форму и размеры тела после снятия внешней нагрузки.

Эта предпосылка справедлива лишь при напряжениях, не превышающих для данного материала определенной, постоянной величины, называемой *пределом упругости*.

Предпосылка об идеальной упругости материала используется при решении большинства задач сопротивления материалов.

Схематизация по геометрии отдельных элементов конструкции.

Основное внимание в сопротивлении материалов уделяется изучению брусьев, являющихся наиболее распространенным элементом многих конструкций.

Брусом называется элемент, длина которого значительно больше его поперечных размеров.

Осью бруса называется линия, соединяющая центры тяжести его поперечных сечений.

Плоская фигура, имеющая свой центр тяжести на оси и нормальная к ней, называется его *поперечным сечением*.

Брус с прямолинейной осью часто называют *стержнем* (рис. 1.2, а).

Элемент конструкции, длина и ширина которого во много раз превышают его толщину, называется *оболочкой* (рис. 1.2, б).

Геометрическое место точек, равноудаленных от наружной и внутренней поверхностей оболочки, называется *срединной поверхностью*.

Оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость, называется *пластинкой* (рис. 1.2, в).

Элемент конструкции, размеры которого во всех направлениях мало отличаются друг от друга (например, сплошная опора моста), называется *массивным телом* (рис. 1.2, *г*).

Методы расчета пластинок, оболочек и массивов рассматриваются в курсе «Прикладная теория упругости».

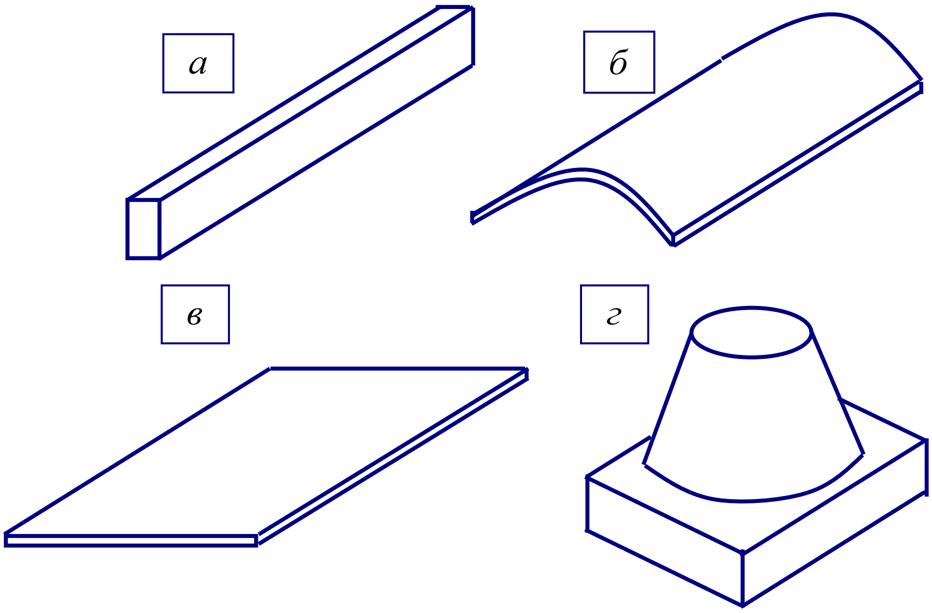

Рис. 1.2

Схематизация по опорным устройствам.

Для прикрепления сооружения к основанию служат опоры, обеспечивающие неподвижность опорных точек конструкции. Обычно в сопротивлении материалов рассматривают три основных типа опор: шарнирно подвижная опора, шарнирно неподвижная опора и жесткое защемление.

На рис. 1.3, а изображена простейшая схема устройства *шарнирно подвижной опоры,* а на рис. 1.3, б – ее условное изображение. Подвижная опора допускает вращение вокруг оси, проходящей через центр шарнира k опоры, и поступательное перемещение по линии kl. В шарнирно подвижной опоре возникает реакция R_k, нормальная к направлению перемещения катков.

Шарнирно неподвижная опора (рис. 1.3, в) обеспечивает вращение верхнего балансира K вокруг оси, проходящей через центр шарнира k, и не допускает линейных перемещений. В расчетной схеме она представляется двумя опорными стержнями (рис. 1.3, *г*). В шарнирно неподвижной опоре возникает наклонная реакция, вертикальная и горизонтальная составляющие которой (R_k и H_k) показаны на рис. 1.3, *г*.

Жесткое защемление (рис. 1.3, *д*, е, з) не допускает каких либо линейных перемещений и поворота. В защемлении возникают две составляющие R_k,

H_k и реактивный момент M_k (рис. 1.3, е). Жесткое защемление эквивалентно трем опорным стержням – рис. 1.3, з).

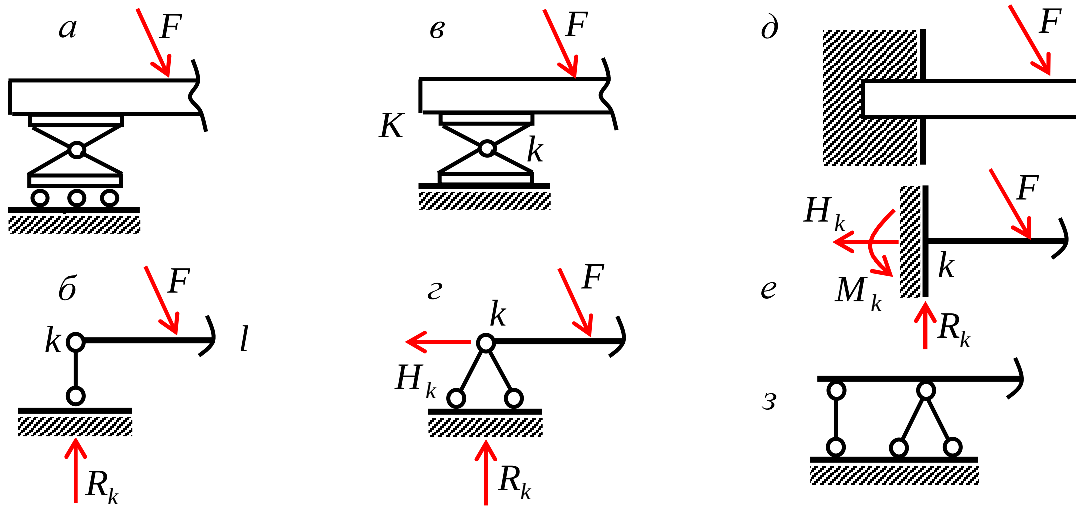

Рис. 1.3

Схематизация по нагрузке.

Распределенные нагрузки могут быть *поверхностными* (давление ветра, воды на стенку) или *объемными* (сила тяжести, силы инерции). Если давление q_1 ($H/м^2$) передается на элемент конструкции через площадку, размеры которой очень малы по сравнению с размерами всего элемента ($a << \ell$), то его на основании принципа Сен-Венана (см. ниже) можно привести к *сосредоточенной силе* F (рис. 1.4).

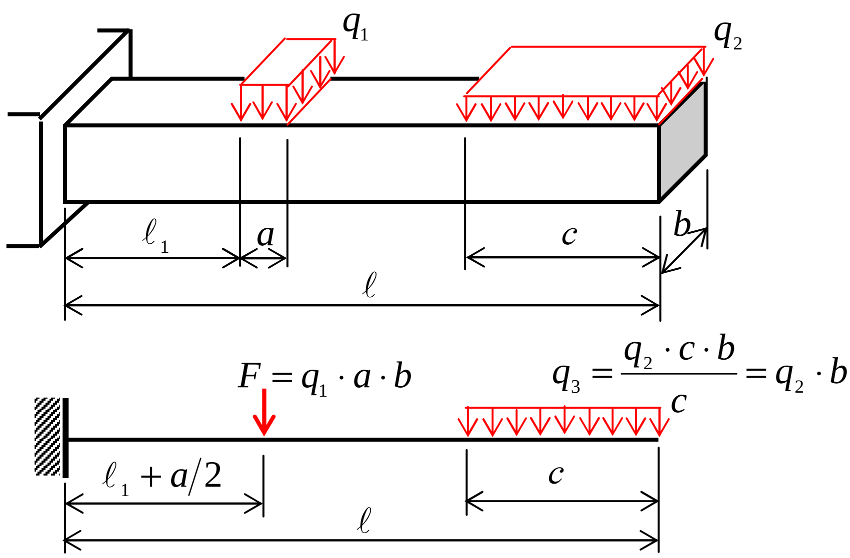

Рис. 1.4

Сосредоточенная сила F измеряется в ньютонах (H), килоньютонах ($кH$). Подобным образом вводятся понятия сосредоточенных изгибающих и крутящих моментов.

Если давление q_2 $(H/м^2)$ передается на элемент конструкции через площадку, размеры которой сравнимы с размерами всего элемента $(c < \ell)$, то его представляют в виде *распределенной или погонной нагрузки* q_3 с размерностью $H/м$ (рис. 1.4).

На расчетной схеме вместо бруса изображается его ось.

Нагрузки, распределенные по линии и сосредоточенные в точках, реально не существуют. Их можно получить лишь в результате схематизации реальных нагрузок, распределенных по объему (объемных сил) или по поверхности.

Нагрузки различаются не только по способу их приложения (распределенные и сосредоточенные), но также по длительности действия (постоянные и временные) и характеру воздействия на конструкцию (статические и динамические).

Постоянные нагрузки (например, собственный вес конструкции) действуют на протяжении всего периода эксплуатации конструкции.

Временные нагрузки (например, вес поезда) действуют в течение ограниченного промежутка времени.

Статическими называются нагрузки, которые изменяют свою величину или точку приложения (или направление) с очень небольшой скоростью, так что возникающими при этом ускорениями можно пренебречь.

Если ускорения значительны и нагрузка изменяется во времени с большой скоростью, то мы имеем дело с *динамической* нагрузкой. Действие таких нагрузок сопровождается возникновением колебаний сооружений. При этом, согласно второму закону Ньютона, возникают силы инерции, пропорциональные массам и ускорениям, которыми при расчете пренебречь нельзя.

Временная нагрузка может сохранять более или менее постоянную величину в течение всего периода ее действия, а может непрерывно изменяться по некоторому закону; в последнем случае она называется *переменной нагрузкой*.

Если переменная нагрузка изменяется по циклическому (повторяющемуся) закону, то она называется *циклической*.

В заключение отметим, что если для одного объекта может быть предложено несколько расчетных схем, то, с другой стороны, одной расчетной схеме может быть поставлено в соответствие много различных реальных объектов.

Последнее обстоятельство является весьма важным, так как исследуя некоторую схему, можно получить решение целого конкретных задач, сводящихся к данной схеме.

Основные принципы и гипотезы сопротивления материалов

Принцип независимости действия сил гласит, что результат действия на тело системы сил равен сумме результатов воздействия тех же сил, прилагаемых к телу последовательно и в любом порядке.

Например, прогиб w конца бруса (рис. 1.5) от нагрузок F_1 и F_2 равен сумме прогибов w_1 и w_2 от действия каждой нагрузки в отдельности, т. е. $w = w_1 + w_2$.

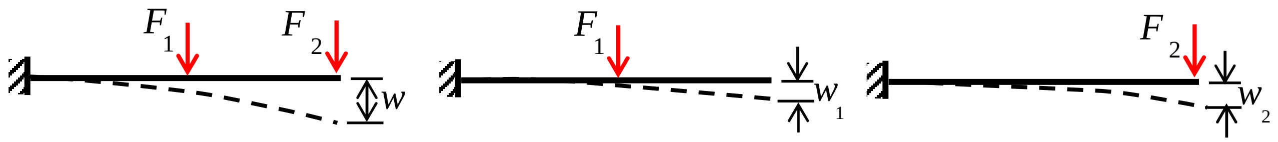

Рис. 1.5

Он применим к деформируемым телам лишь тогда, когда перемещения точек приложения сил, являющиеся результатом деформации тела, во-первых малы по сравнению с размерами тела и во-вторых линейно зависят от действующих сил (*закон Гука*).

Закон Гука используется при решении большинства задач сопротивления материалов.

На основании *принципа Сен-Венана* в точках тела, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, величина внутренних сил весьма мало зависит от конкретного способа приложения этих нагрузок, а зависит только от ее статического эквивалента (рис. 1.6).

Этот принцип во многих случаях позволяет производить замену одной системы сил другой системой, статически эквивалентной, что позволяет часто значительно упростить расчет.

Под внутренними силами будем понимать изменение взаимодействия между частицами материала, вызванное внешней нагрузкой.

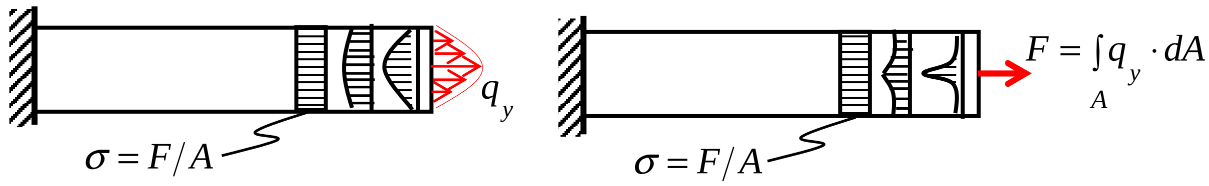

Рис. 1.6

Гипотеза плоских сечений предполагает, что сечение, плоское и перпендикулярное к продольной оси до деформации, остается таким же и после деформации (рис. 1.7).

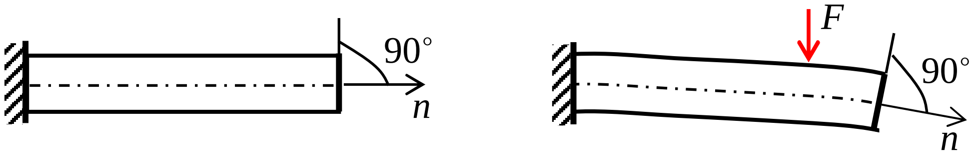

Рис. 1.7

Эта предпосылка впервые была введена Бернулли. Она играет исключительно важную роль в сопротивлении материалов и используется при выводе большинства формул для расчета брусьев.

Гипотеза об отсутствии начальных напряжений отрицает наличие в теле внутренних сил до приложения внешней нагрузки.

Это допущение полностью не выполняется ни для одного материала. Например, в стальных деталях имеются внутренние силы, вызванные неравномерным остыванием, в дереве – неравномерным высыханием, в бетоне – в процессе твердения и т.д. Однако, часто они достаточно малы, чтобы их учитывать.

По мере необходимости, при выводе формул, будем принимать и другие гипотезы и предположения, основанные на опыте.

Внутренние силовые факторы. Метод сечений. Напряжения, перемещения и деформации

Внутренние силовые факторы

Силы являются мерилом механического взаимодействия тел. Действие окружающих тел на конструкцию заменяется силами, которые называют *внешними*. Взаимодействия между отдельными элементами или частями конструкции, возникающие под действием внешних сил, называются *внутренними силами*. Вообще внутренние силы возникают между всеми смежными частицами тела при нагружении.

В сопротивлении материалов считается, что если нет внешних сил, то отсутствуют и внутренние, то есть, справедлива гипотеза о ненапряженном начальном состоянии тела.

Рассмотрим некоторое тело, имеющее форму бруса (рис.1.8, а). Пусть к нему приложена некоторая система сил $F_1, F_2, ..., F_n$, удовлетворяющая условиям равновесия: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$, $\sum M_x = 0$, $\sum M_y = 0$, $\sum M_z = 0$.

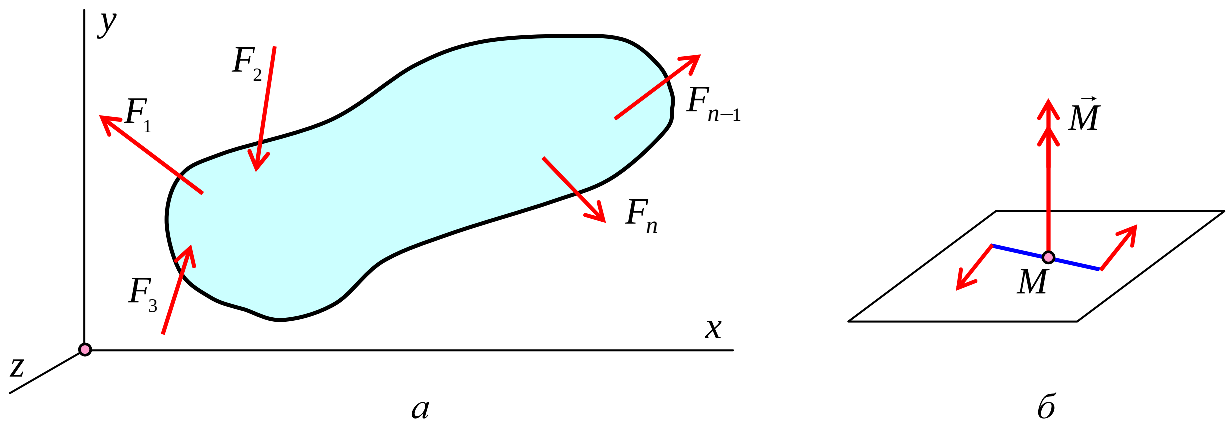

Рис. 1.8

Внутренние силы, возникающие в брусе, выявляются только в том случае, если рассечь брус мысленно на две части, например, сечением I (рис.1.9). Такой прием выявления внутренних сил в сопротивлении материалов носит название *метода сечений*.

Внутренние силы по принципу действия и противодействия всегда взаимны. То есть, правая часть бруса действует на левую точно так же, как и левая на правую, и системы внутренних сил воздействия частей бруса друг на друга равны по величине и противоположны по направлению.

Внутренние силы должны быть распределены по сечению так, чтобы деформированные поверхности сечения I при совмещении правой и левой частей тела в точности совпадали (условие неразрывности деформаций).

Понятно, что внутренние силы должны быть такими, чтобы удовлетворялись условия равновесия для правой и левой частей бруса в отдельности. Очевидно, что при помощи уравнений равновесия можно определить не закон распределения внутренних сил, а только их равнодействующие, да и то при условии, если все внешние силы заданы.

Напомним, что при составлении уравнений равновесия, момент пары сил удобно изображать в виде вектора, перпендикулярного плоскости действия пары сил и направленного в ту сторону, откуда поворот, совершаемый парой сил, виден происходящим против хода часовой стрелки (рис.1.8, б).

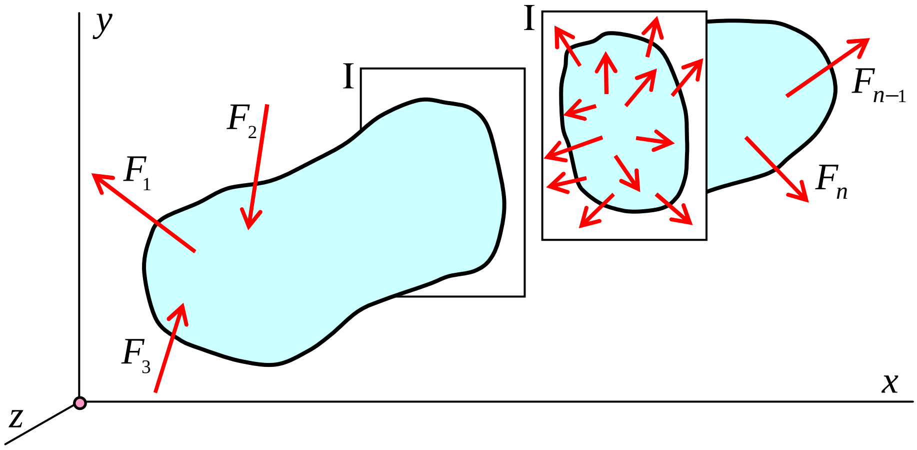

Рис.1.9

Воспользуемся правилами статики и приведем систему внутренних сил к центру тяжести сечения. В результате получим главный вектор $\vec{R}$ и главный момент $\vec{M}$(рис 1.10,а). Выберем далее систему координат x, y, z.

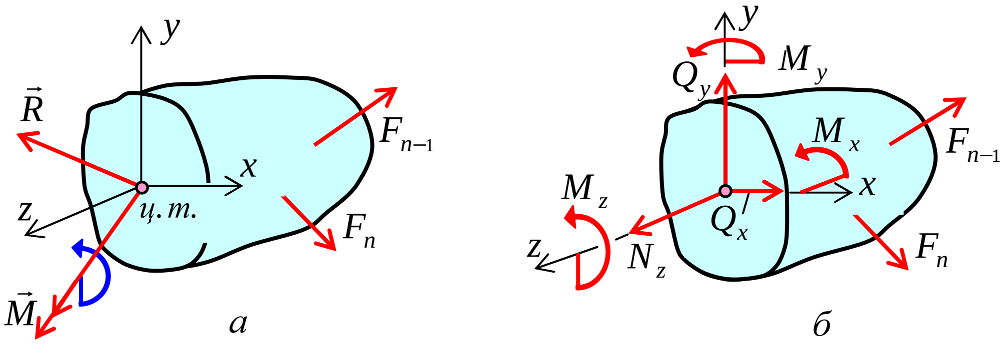

Рис.1.10

Ось z направим по нормали к сечению, а оси x и y расположим в его плоскости. Спроектировав главный вектор и главный момент на оси x, y, z, получаем шесть составляющих: три силы и три момента. Эти составляющие называются *внутренними силовыми факторами* в сечении бруса (рис 1.10, б).

Составляющая внутренних сил по нормали к сечению называется *нормальной* или *продольной силой* (N_z) в сечении. Силы Q_x и Q_y называются *поперечными силами*. Момент относительно нормальной оси z (M_z или $M_{кр}$) называется *крутящим моментом*, а моменты M_x и M_y – *изгибающими моментами* относительно осей x и y. При известных внешних силах все шесть внутренних силовых факторов определяются из шести уравнений равновесия, которые могут быть составлены для отсеченной части бруса.

Виды деформаций

Каждому из внутренних силовых факторов N_z, Q_x, Q_y, M_z, M_x и M_y соответствует определенный вид деформации бруса. Продольной силе N_z соответствует *растяжение* (или *сжатие*), поперечной силе Q_x (или Q_y) – *сдвиг*, крутящему моменту M_z – *кручение*, а изгибающему моменту M_x (или M_y) – *чистый изгиб* в плоскости yz (или xz).

Обычно в поперечном сечении наряду с изгибающим моментом (например M_x) возникает и поперечная сила (Q_y). Такой случай деформации называется *поперечным изгибом* (в плоскости *yoz*). Различные их сочетания, например, сжатие с изгибом, изгиб с кручением и т. п., представляют собой *сложное сопротивление*.

Метод сечений

Общий прием определения внутренних силовых факторов носит название *метода сечений*. Рассечем брус плоскостью I, совпадающей с поперечным сечением бруса (рис 1.9) . В полученном поперечном сечении в общем случае действует шесть внутренних силовых факторов: N_z, Q_x, Q_y, M_z, M_x и M_y (рис.1.10, б).

Поскольку весь брус находился в равновесии (рис.1.8, а) , то и оставленная его правая часть также находится в равновесии. Тогда внешние силы, приложенные к правой части, будут уравновешиваться внутренними силовыми факторами, действующими на эту часть бруса, т. е. они статически эквивалентны друг другу.

Таким образом, *проекция на какую-либо ось внутренних усилий в сечении (проекции остальных пяти равны нулю), равна проекции на эту же ось все внешних сил, приложенных к оставленной части*.

Аналогично, *момент относительно какой-либо оси внутренних усилий в сечении (моменты остальных пяти равны нулю), равен моменту относительно этой же оси всех внешних сил, приложенных к оставленной части*.

Например, сила N_z равна сумме проекций на ось z всех внешних сил, действующих на оставленную часть бруса, крутящий момент M_z в поперечном сечении бруса равен сумме моментов относительно оси z всех внешних сил, приложенных к оставленной части бруса т. д.

Для уменьшения вычислительной работы обычно оставляется та часть бруса, на которую действует меньше сил.

Суть метода сечений можно в общем виде представить в виде последовательности следующих действий:

1. Мысленно рассекаем брус на две части в пределах исследуемого i – го участка.
2. Оставляем ту часть бруса, на которую действует меньше сил.
3. Заменяем действие условно отброшенной части бруса положительными внутренними силовыми факторами, приведенными к центру тяжести исследуемого сечения бруса.
4. Выбираем для оставленной части бруса скользящую систему координат (начало координат совмещаем с границей участка, положение исследуемого сечения определяется координатой z_i, где $0 \le z_i \le c$ и c – длина i – го участка).
5. Определяем искомые внутренние силовые факторы из уравнений равновесия, которые составляем для оставленной части бруса.

Напряжения

Чтобы характеризовать закон распределения внутренних сил по сечению, необходимо ввести для них числовую меру. За такую меру принимается *напряжение*. Размерность напряжений равна отношению размерности силы к размерности площади. В международной системе единиц СИ напряжения измеряются в паскалях: $1Па = 1\,Н/м^2$.

Рассмотрим сечение A некоторого тела (рис.1.11, а).Зафиксируем в нем точку k с единичным вектором нормали n. В окрестностях этой точки выделим малую площадку ΔA. Главный вектор внутренних сил, действующих на этой площадке, обозначим через ΔR. За *среднее напряжение* на площадке ΔA принимаем отношение

$$p_{ср} = \Delta R / \Delta A.$$

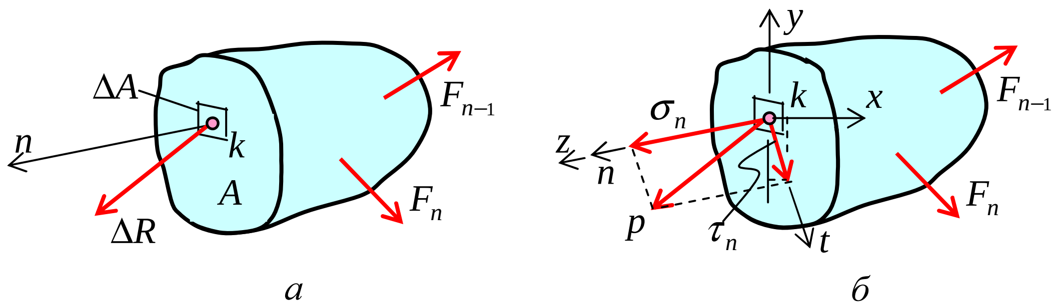

Рис.1.11

Будем уменьшать площадку ΔA, стягивая ее в точку k. Поскольку среда непрерывна, возможен предельный переход при $\Delta A \to 0$. В пределе получаем

$$\underbrace{\ell im}_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta A} = \vec{p}\,.$$

Векторная величина $\vec{p}$ представляет собой *полное напряжение* в точке k в сечении A. В общем случае направление вектора полного напряжения $\vec{p}$ не совпадает с направлением вектора нормали n (рис.1.11, б). Полное напряжение $\vec{p}$ может быть разложено на три составляющие по нормали к плоскости сечения и по двум осям в плоскости сечения. Проекция вектора $\vec{p}$ на направление вектора n обозначается σ_n или σ_z называется *нормальным напряжением*. Составляющие в плоскости сечения называются *касательными напряжениями* и обозначаются через проекции τ_n на ось x (τ_x) и на ось y (τ_y). Очевидно, что

$$p^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_z^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2\,.$$

Нормальное напряжение в данной точке по определенному сечению характеризует интенсивность сил отрыва или сжатия частиц элемента конструкции, расположенных по обе стороны этого сечения. а касательное напряжение – интенсивность сил, сдвигающих эти частицы в плоскости рассматриваемого сечения.

Если через точку k в теле провести другую секущую площадку, напряжение p в той же точке будет, вообще говоря, другим. Совокупность напряжений для множества площадок, проходящих через точку, образует *напряженное состояние* в точке.

Напряженное состояние является в сопротивлении материалов одним из наиболее важных понятий. Позже будут рассмотрены наиболее простые и часто встречающиеся частные случаи напряженного состояния.

На рис.1.12 в поперечном сечении показаны нормальные и касательные напряжения и их статические эквиваленты – внутренние силы.

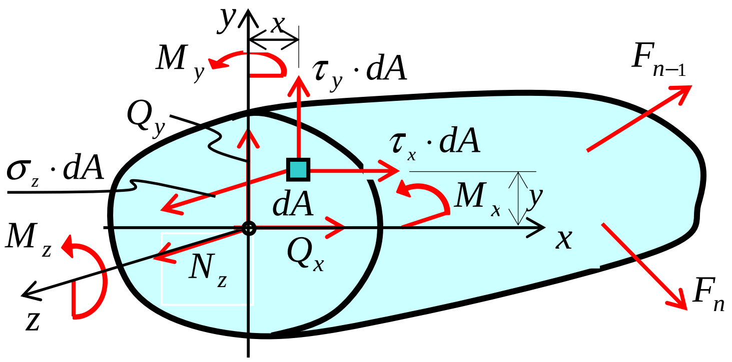

Рис. 1.12

Напряжения будут связаны с соответствующими внутренними силами следующими зависимостями:

$\sum F_x = 0$, $N_z = \int_A \sigma_z \cdot dA$,

$$\sum F_y = 0,\ N_z = \int_A \sigma_z \cdot dA$$

$$\sum F_z = 0,\ N_z = \int_A \sigma_z \cdot dA$$

$$\sum M_x = 0,\ M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA$$

$$\sum M_y = 0,\ M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA$$

$$\sum M_z = 0,\ M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA$$

Перемещения

При действии внешних сил наряду с возникновением напряжений происходит изменение объема тела и его формы, т. е. тело деформируется. При этом различают начальное (недеформированное) и конечное (деформированное) состояния тела.

Отнесем недеформированное тело к декартовой системе координат $oxyz$ (рис.1.13). Пусть положение некоторой точки M определено. Под действием внешних сил она меняет положение в пространстве (точка M_1).

Вектор, имеющий начало в точке недеформированного тела, а конец в той же точке деформированного тела, называется вектором *полного перемещения точки* ($\overrightarrow{MM_1}$). Его проекции на оси носят название *перемещений по осям*. Они обозначаются через u, v и w соответственно осям x, y и z.

Аналогично вводится понятие *углового перемещения*. Если рассмотреть отрезок прямой между двумя близкими точками до и после изменения формы тела, то легко установить, что этот отрезок поворачивается в пространстве на некоторый угол. Этот угол поворота также характеризуется вектором, который может быть разложен по осям x, y и z.

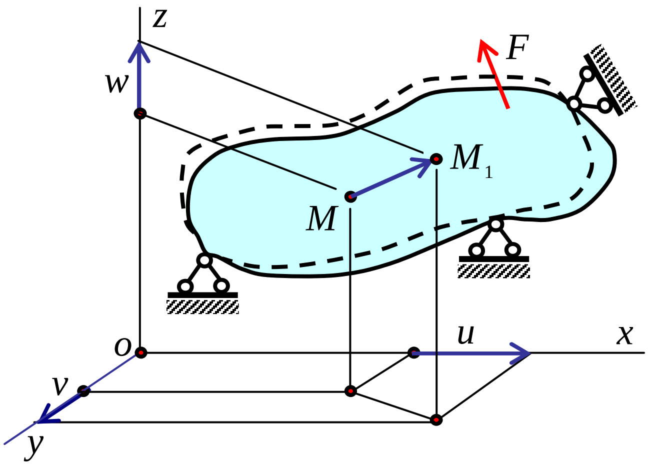

Рис.1.13

Допущение, при котором считается, что перемещения u, v и w любой точки являются малыми по сравнению с общими геометрическими размерами тела, носит название *принципа начальных размеров*.

Согласно этому принципу при составлении уравнений статики (уравнений равновесия) тело рассматривают как недеформированное, имеющее те же геометрические размеры, какое оно имело до нагружения внешними силами.

Деформации

Для того чтобы характеризовать интенсивность изменения формы и размеров вводится понятие деформации.

Через точку M в направлениях осей x, и y проведем бесконечно малые отрезки длиной dx и dy. После приложения нагрузки к телу точка M переместится в положение M_1, а длины этих отрезков и угол между ними изменятся на Δdx, Δdy и γ_{xy} соответственно (рис. 1.14).

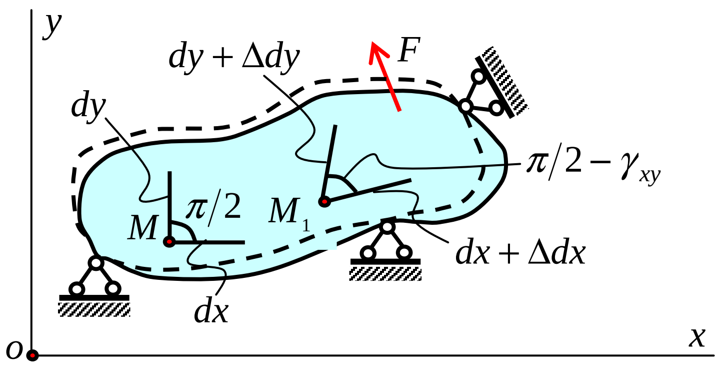

Рис. 1.14

Отношение $\frac{\Delta dx}{dx}$ приращения длины отрезка Δdx к его начальной длине dx будем называть *линейной деформацией* (эпсилон) в точке M вдоль оси x, т. е. $\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$. Если рассматривать деформации в направлении других координатных осей, то имеем $\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}$ и $\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$.

Изменение первоначально прямого угла между отрезками длиной dx и dy после приложения нагрузки к телу, выраженное в радианах, будем называть *угловой деформацией* γ_{xy} (гамма) в точке M в плоскости xy. Аналогично γ_{yz} и γ_{zx} будем называть угловыми деформациями в плоскостях yz и zx.

Линейные и угловые деформации – величины безразмерные. Деформацию ε_x часто называют *относительной линейной деформацией*, а γ_{xy} – относительным сдвигом.

Совокупность линейных деформаций по различным направления и угловых деформаций по различным плоскостям, проходящим через рассматриваемую точку, представляет собой *деформированное состояние* в этой точке.